1 Allgemeines zum Buch

Stand: 12.10.2008

Zum Download des Windows Zip-Archivs Nplex.zip (0.926 MB):

Nplex.zip enthält mehrere Programm-Dateien mit den jeweiligen Extensions: .dat, .exe, .for

Die Programme werden in meinem Buch „Rekursive Zahlen“
(ISBN 978-3-8370-4851-3 , Preis: 28.42 Euro)
ausführlich beschrieben.

Alle von meiner Website www.pseudoprim.de geladenen Dateien dürfen beliebig weiter verbreitet werden.

Sie dürfen jedoch nicht kommerziell verwertet werden.

Eine Haftung jeglicher Art wird von mir nicht übernommen.

Hinweis: Die Programme n1_r_bmp.exe und n2_rr_bmp.exe erstellen Pixelgrafiken im offenen BMP-Format. Dieses Format darf mit freier Software genutzt werden. Die Zeichen n1 und n2 am Anfang der beiden Programmnamen stehen für die Ordnung $n = 1$ und $n = 2$ der verwendeten rekursiven Zahlen.

1.1 Mathematische Einführung

Im Buch werden rekursive Zahlen definiert. Zu den rekursiven Zahlen gehören auch die komplexen Zahlen und ihre Erweiterung ins Dreidimensionale. Als Bestandteil der rekursiven Zahlen erfahren die komplexen Zahlen eine allgemeinere Definition. Das Ziehen der mystischen Wurzel aus der reellen Zahl -1 wird vermieden.

Eine rekursive Zahl wird durch bestimmte Parameter eindeutig definiert.

Der Parameter für die Rekursionsstufe einer rekursiven Zahl ist ihre Ordnung n. Die komplexen Zahlen und ihre Erweiterung ins Dreidimensionale haben zum Beispiel die Ordnung $n = 1$.

Ich gebe hier eine grobe Einführung in die Definition der rekursiven Zahlen.

Definition einer komplexen Zahl als rekursive Zahl

a sei eine rekursive Zahl. Formal wird a als ein Polynom in z ($a = a(z)$) vom Grad g dargestellt.

$$a = a(z) = a_0 z^0 + a_1 z^1 + a_2 z^2 + \cdots + a_g z^g$$

z ist keine Variable, sondern eine Einheit mit spezieller Eigenschaft. Die Definition der rekursiven Zahlen folgt aus der Multiplikation zweier Polynome mit anschließender Reduktion im Grad des Ergebnisses.

Die Reduktion der multiplizierten Polynome erfolgt mit dem Reduzierungspolynom ($e = e(z)$) vom Grad g.

$$e = e(z) = e_0 z^0 + e_1 z^1 + e_2 z^2 + \cdots + e_g z^g$$

$e(z)$ gehört zu $a(z)$ und hat die gleichen Parameter wie $a(z)$. In Anlehnung an die Bezeichnungen in der linearen Algebra könnte man e auch als Eigenpolynom bezeichnen.

Die Ordnung n einer rekursiven Zahl

Die Ordnung n gibt die Rekursionsstufe n einer rekursiven Zahl an. Den reellen Zahlen wird per Definition die Ordnung $n = 0$ und die Dimension $d = 1$ zugeordnet. Für sie gelten die vier Grundrechenarten Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division. Andere Operationen werden auch für rekursive Zahlen höherer Ordnung n nicht benötigt. Rekursion heißt Wiederholung. Mit den Parametern für die komplexen Zahlen wird das Prinzip der Rekursion erläutert.

Gegeben für a, e, x und z ist mit der Ordnung $n = 1$:

$$\begin{aligned} a &= a_0 z^0 + a_1 z^1 \\ e &= e_0 z^0 + e_1 z^1 \\ x &= z \cdot y \qquad \text{mit: } e_0 = 1,\ e_1 = 0,\ y = 1,\ o = r,\ g = 1 \end{aligned}$$

In diesen drei Formeln sind a_0, a_1, e_0, e_1 und y reelle Zahlen. Sie sind von der Ordnung $\bar{n} = n-1 = 0$. Die Zahl a, das Polynom e und die Einheiten z, x sind mit $\bar{n} = 0$ von der Ordnung $n = \bar{n} + 1 = 1$. Setzt man für a_0, a_1, e_0, e_1 und y Zahlen der Ordnung $\bar{n} = 1$ ein, dann erhalten a, e, z und x die Ordnung $n = \bar{n} + 1 = 2$. Diese Methode kann beliebig oft wiederholt werden. Im folgenden Text werden die oben verwendeten Parameter näher erläutert.

Die Orientierung o einer rekursiven Zahl

Die Orientierung o einer rekursiven Zahl gibt die Richtung des Exponentenwachstums der Einheiten z an (Erklärung für die Dimension $d = 3$).

$$
\begin{array}{lll}
a = a_0 z^0 + a_1 z^1 + a_2 z^2 & o = r, & r \text{ für rechts} \\
a = a_{-2} z^{-2} + a_{-1} z^{-1} + a_0 z^0 & o = l, & l \text{ für links} \\
a = a_{-1} z^{-1} + a_0 z^0 + a_1 z^1 & o = s, & s \text{ für symmetrisch}
\end{array}
$$

Die Dimension d einer rekursiven Zahl

Die Dimension d einer rekursiven Zahl ergibt sich aus dem Grad g des Reduzierungspolynoms e und seiner Orientierung o.

$$
\begin{array}{ll}
o = r: & d = g + 1 \\
o = l: & d = g + 1 \\
o = s: & d = 2 \cdot g + 1
\end{array}
$$

Der Vorzeichen-Parameter y

Es folgt vorab eine nähere Erläuterung zur Namensvergabe des Vorzeichen-Parameters y. Am Beispiel der komplexen Zahlen mit der Einheit $z = i$ wird der Vorzeichen-Parameter y erklärt.

Aus $x^2 = -e_x$ und $e_x = e_0 x^0 + e_1 x^1$ folgt $x^2 = -e_0 x^0 - e_1 x^1$.

Mit den Parametern $e_0 = 1$ und $e_1 = 0$ ergibt sich:
$x^2 = -1x^0 - 0x^1$ bzw. formal $x = \sqrt{-1x^0 - 0x^1}$

Aus $z \cdot y = z \cdot \dfrac{1}{\bar{y}} = x$ berechnet man z zu $z = \bar{y} \cdot \sqrt{-1x^0 - 0x^1}$.

Mit $\bar{y} = \pm 1$ folgt $z = \pm 1 \cdot \sqrt{-1x^0 - 0x^1} = \pm i$. Die Einheit z enthält für den komplexen Fall mit $y = 1 \;/\; \bar{y} = \pm 1$ ein Vorzeichen. y ist wegen $y = 1 \;/\; \bar{y}$ ein inverser Vorzeichen–Parameter.

Definierende Multiplikation rekursiver Zahlen

Am Beispiel der komplexen Zahlen a, b, c (mit $g = 1$) wird nun die Multiplikation $a \cdot b = c$ durchgeführt.

Es gelte:

$$\begin{aligned} a &= a_0 z^0 + a_1 z^1 \\ b &= b_0 z^0 + b_1 z^1 \qquad\qquad \text{mit } g = 1,\; z^0 = 1 \end{aligned}$$

Das Ergebnis von $a \cdot b$ sei:

$$c = c_0 z^0 + c_1 z^1$$

Die Multiplikation von a mit b entspricht zunächst der Multiplikation zweier Polynome vom Grad 1.

Man erhält:

$$\begin{aligned} a \cdot b &= (a_0 + a_1 z^1) \cdot (b_0 + b_1 z^1) \\ &= a_0 b_0 + a_0 b_1 z^1 + a_1 b_0 z^1 + a_1 b_1 z^2 \end{aligned}$$

An diesem Ausdruck stört der Anteil $a_1 b_1 z^2$, denn das Ergebnis hat den Grad $g = 2$. $a \cdot b$ muß aber wieder vom Grad $g = 1$ sein.

Um den Anteil $a_1 b_1 z^2$ zu eliminieren, definiert man zunächst das Reduzierungspolynom $e = e_z$ als

$$e = e_z = e(z) = e_0 z^0 + e_1 z^1 + e_2 z^2 + \cdots + e_g z^g$$

und die (willkürliche) Reduzierungsformel

$$z^{g+1} + e_z = 0$$

e_z hat die gleichen Parameter wie a.

Mit $g = 1$ gilt: $\quad z^{g+1} = z^2 = -e_z = -e_0 \cdot 1 - e_1 \cdot z^1$

Es folgt: $\quad a_1 b_1 z^2 = a_1 b_1(-e_z) = -a_1 b_1 e_0 - a_1 b_1 e_1 z^1$

Speziell mit $e_0 = 1,\ e_1 = 0$ erhält man $z^2 = -1 \cdot z^0 - 0 \cdot z^1$
Für $z = \sqrt{-e_z}$ gilt : $-e_z$ ist eine rekursive Zahl der Ordnung $n = 1$ und keine reelle Zahl der Ordnung $n = 0$!

Das Reduzierungspolynom e_z für komplexe Zahlen ist also $e_z = 1 \cdot z^0 + 0 \cdot z^1$.

Nun kann der Anteil $a_1 b_1 z^2$ aus $a \cdot b$ ersetzt werden. Für die komplexe Multiplikation ergibt sich:

$$\begin{aligned} a \cdot b &= (a_0 + a_1 z^1) \cdot (b_0 + b_1 z^1) \\ &= a_0 b_0 + a_0 b_1 z^1 + a_1 b_0 z^1 + a_1 b_1 z^2 \\ &= a_0 b_0 + a_0 b_1 z^1 + a_1 b_0 z^1 + a_1 b_1 \cdot (-1) \\ &= (a_0 b_0 - a_1 b_1) + (a_0 b_1 + a_1 b_0) z^1 \end{aligned}$$

Man erkennt, daß sich aus der Multiplikation zweier rekursiver Zahlen ihre Definition ergibt. Es folgt eine Verallgemeinerung. e wurde oben als $e = e(z)$ definiert. Nun wird der Vorzeichen-Parameter y in die Rechnung eingeführt. Er folgt aus der Vorzeichen-Formel:

$$z \cdot y = x \qquad \text{mit} \quad y = \frac{1}{\bar{y}} \quad \text{und} \quad z = \bar{y} \cdot x$$

In Worten: Die neue Einheit x ergibt sich aus der Multiplikation der Einheit z mit einem Parameter y. Die Einheit für die rekursiven Zahlen ist nach wie vor z. Um die Multiplikation $a \cdot b$ sinnvoll durchführen zu können, erhält e eine zweite praktische Form:

$$e = e_x = e(x) = e_0 x^0 + e_1 x^1 + e_2 x^2 + \cdots + e_g x^g$$

Die Multiplikation von $a \cdot b$ führt man als $a(x) \cdot b(x)$ durch und reduziert mit $e(x)$. Hier das allgemeine Beispiel mit $g = 1$:

$$\begin{aligned} a(x) \cdot b(x) &= (a_0 + a_1 x^1) \cdot (b_0 + b_1 x^1) \\ &= a_0 b_0 + a_0 b_1 x^1 + a_1 b_0 x^1 + a_1 b_1 x^2 \\ &= a_0 b_0 + a_0 b_1 x^1 + a_1 b_0 x^1 + a_1 b_1 \cdot (-e) \\ &= a_0 b_0 + a_0 b_1 x^1 + a_1 b_0 x^1 - a_1 b_1 e_0 - a_1 b_1 e_1 x^1 \end{aligned}$$

Oder vollständig:
$a(x) \cdot b(x) = a_0 b_0 x^0 + a_0 b_1 x^1 + a_1 b_0 x^1 - a_1 b_1 e_0 x^0 - a_1 b_1 e_1 x^1$

Die rechte Seite dieser Gleichung läßt sich in Matrizenschreibweise darstellen. Man erhält sowohl

$$\begin{pmatrix} x^0 & \\ & x^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 & -a_1 e_0 \\ a_1 & a_0 - a_1 e_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix}$$

als auch

$$\begin{pmatrix} x^0 & \\ & x^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 & -b_1 e_0 \\ b_1 & b_0 - b_1 e_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}.$$

Wegen $x = z \cdot y$ gilt ebenso

$$\begin{pmatrix} z^0 & \\ & z^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^0 & \\ & y^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 & -a_1 e_0 \\ a_1 & a_0 - a_1 e_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix}$$

oder

$$\begin{pmatrix} z^0 & \\ & z^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^0 & \\ & y^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 & -b_1 e_0 \\ b_1 & b_0 - b_1 e_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}.$$

Mit

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} z^0 & \\ & z^1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y^0 & \\ & y^1 \end{pmatrix}$$

und

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_0 & -\, a_1 e_0 \\ a_1 & a_0 - a_1 e_1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix}$$

bzw.

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_0 & -\, b_1 e_0 \\ b_1 & b_0 - b_1 e_1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}$$

gilt

$$a \cdot b = c = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{Y} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{b}$$

bzw.

$$a \cdot b = c = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{Y} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{a}$$

Das Produkt $a \cdot b$ zweier rekursiver Zahlen ist identisch mit dem Produkt $b \cdot a$.

Aus diesem Ergebnis folgt:

Ein Produkt aus beliebig vielen rekursiven Zahlen ist unabhängig von der Reihenfolge seiner einzelnen Zahlen.

Mit

$$\mathbf{M} = \mathbf{Y} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_0 & -\, a_1 e_0 \\ y\, a_1 & y\, a_0 - y\, a_1 e_1 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{M} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{c}$$

wird das Produkt $a \cdot b = c$ ohne Einheit z numerisch berechnet.

Die Parametersets $\mathrm{ps_i}$ einer rekursiven Zahl

Die Darstellung einer rekursiven Zahl ist recht aufwendig. Das Folgende ist ein Vorschlag zur Schreibweise und zur Beschreibung einer allgemeinen rekursiven Zahl a. In $a = a_{o_n}$ steht o für $\{r, l, s\}$ und n für die maximale Ordnung n_{max} von a. Über Orientierung, Ordnung und Grad der kleineren Rekursionsstufen ist zunächst nichts bekannt.

Zur allgemeinen Schreibweise einer rekursiven Zahl a:

$$\begin{aligned}
a_{o_n} &: \text{allgemeine rekursive Zahl } a \\
z_{o_n} &: \text{Einheit der rekursiven Zahl } a_{o_n} \\
a0_{o_{n-1}} &: \text{Koeffizient } a_0 \text{ zu } a_{o_n} \\
e_{o_n} &: \text{Reduzierungspolynom zu } a_{o_n} \\
z_{o_n} &: \text{Einheit des Reduzierungspolynoms } e_{o_n} \\
e0_{o_{n-1}} &: \text{Koeffizient } e_0 \text{ zu } e_{o_n} \\
y_{o_{n-1}} &: \text{Vorzeichen-Parameter zu } a_{o_n}
\end{aligned}$$

Beispiel mit $o = r,\ n = 2,\ g = 1$:

$$\begin{aligned}
a &= a_{r_2} = a0_{r_1} \cdot z_{r_2}^0 + a1_{r_1} \cdot z_{r_2}^1 \\
e &= e_{r_2} = e0_{r_1} \cdot z_{r_2}^0 + e1_{r_1} \cdot z_{r_2}^1 \\
y &= y_{r_1}
\end{aligned}$$

Beschreibung einer rekursiven Zahl $a = a_{o_n}$ der Ordnung $n = 2$ mit dem Parameterset $ps_i,\ i = 1$.

$$
\begin{aligned}
&ps_1 : \\
&\qquad n = 2 : \quad o = r,\ g = 1,\ y_{r_1} = (0,1) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad e0_{r_1} = (1,0) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad e1_{r_1} = (0,0) \\
&\qquad n = 1 : \quad o = l,\ g = 1,\ y_{l_0} = (-1) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad e0_{l_0} = (1) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad e1_{l_0} = (0)
\end{aligned}
$$

Vorschlag für den Aufruf einer Funktion:

$$b = \sinh[\ ps_1\ ](a)$$

oder etwas genauer

$$b_{o_n} = \sinh[\ ps_1\ ](a_{o_n})$$

Verwendet man die rekursiven Zahlen in Reihenentwicklungen für Funktionen, so zeigen diese Funktionen bemerkenswerte Eigenschaften.

Ich zeige hier als Beispiel eine Eigenschaft der Sinus-Reihe.

Rekursive Zahlen werden durch Parameter definiert.

Die Parameter für eine komplexe Zahl $a = (a_0, a_1)$ sind:

$n = 1,\ o = r,\ g = 1,\ e_1 = 0$ und $y = 1,\ e_0 = 1.$

Durch Variation von y und e_0 definiert man mit den Parametersets $ps_1,\ ps_2,\ ps_3,\ ps_4$ verschiedene rekursive Zahlen.

$$\begin{array}{lrrrrr}
ps_1: & y & = & 1, & e_0 & = & 1 \\
ps_2: & y & = & 1, & e_0 & = & -1 \\
ps_3: & y & = & -1, & e_0 & = & 1 \\
ps_4: & y & = & -1, & e_0 & = & -1
\end{array}$$

Für die numerischen Werte der Sinus-Funktion (nicht für die Einheiten) gilt:

$$\begin{array}{lclcr}
\sin[ps_1](0, a_1) & \widehat{=} & \sinh[ps_2](0, a_1) & \widehat{=} & \sinh(a_1) \\
\sin[ps_2](0, a_1) & \widehat{=} & \sinh[ps_1](0, a_1) & \widehat{=} & \sin(a_1) \\
\sin[ps_3](0, a_1) & \widehat{=} & \sinh[ps_4](0, a_1) & \widehat{=} & \sin(a_1) \\
\sin[ps_4](0, a_1) & \widehat{=} & \sinh[ps_3](0, a_1) & \widehat{=} & \sinh(a_1)
\end{array}$$

Die Reihen von Sinus und Sinus hyperbolicus liefern mit passenden rekursiven Zahlen $a = (0, a_1)$ identische Zahlenwerte.

Vorwort

In diesem Buch werden rekursive Zahlen definiert. Sie sollen dem interessierten Leser als Handwerkszeug zu eigenen Versuchen und Anwendungen dienen. Als Anregung werden praktische Beispiele in verschiedenen Gebieten der Mathematik gezeigt.

Zu den rekursiven Zahlen gehören auch die komplexen Zahlen. Von besonderem Interesse ist die Erweiterung der komplexen Zahlen ins Dreidimensionale. Als eine Anwendung dieser Erweiterung wird eine sehr spezielle „Umkehrung“ der periodischen Funktion $exp(0, x + 2k\pi)$ vorgeschlagen.

Des weiteren lassen sich die rekursiven Zahlen für Primzahltests und zur Erzeugung fraktaler Bilder benutzen.

Einleitung

Die Idee zur Einführung der rekursiven Zahlen entstand bei der Beschäftigung mit Primzahltests. Setzt man in den Fermat'schen Primzahltest Matrizen statt ganze Zahlen ein, so hat man das Problem, zu jeder Matrix einen geeigneten Startvektor finden zu müssen. Dieses Problem läßt sich mit komplexen Zahlen umgehen. Der Ausdruck $a^N \equiv r \mod N$ mit a als komplexer Zahl kann als $A^{N-1} \cdot a \equiv r \mod N$ geschrieben werden, wobei A die zu a gehörende Matrix und a der Startvektor ist.

Komplexe Zahlen haben jedoch, wie die ganzen Zahlen, Probleme mit absoluten Pseudo-Primzahlen. Durch Parametrisierung der komplexen Zahlen entstanden die „ersten" rekursiven Zahlen. Mit ihnen werden die absoluten Pseudo-Primzahlen leichter erkannt. In der Regel können aus den Modulo-Resten r Teiler von absolut pseudoprimen N bestimmt werden.

Aus Interesse habe ich mir Programme zur Erzeugung von fraktalen Bildern geschrieben ($a_{i+1} = {a_i}^p + c$). Komplexe Zahlen haben unter anderem die Parameter $y = 1$ und $e_0 = 1$. Durch Kombination von $y = \pm 1$ und $e_0 = \pm 1$ entstehen vier Grundmuster (siehe Buchrückseite). Das Apfelmännchen hat nun drei Geschwister.

Verwendet man die rekursiven Zahlen in Reihenentwicklungen für Funktionen, so zeigen diese Funktionen bemerkenswerte Eigenschaften.